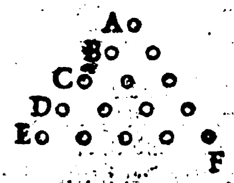
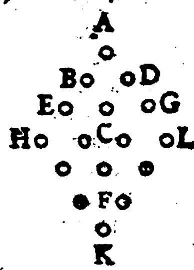
Multiplicationes mit 4. gleichen Factoribus sich äussern und so ferner mit denen übrigen Dignitaeten, deren Namen von denen Figuren aus der Geometrie entstanden. Ein mehreres von diesen Zahlen findet man unter gehörigen Titeln, und kann man von dieser Art die Zahlen zu tractiren *Lazari Schoneri* Tract. de Numeris figuratis, so denen zwey Büchern der Arithmetic des *Petri Rami* angehenget, nachsehen. Die Summen derer Arithmetischen Progressionen, welche sich von eins anfangen, lassen sich eben Falls in Geometrischen Figuren vorstellen, dahero auch diese und zwar am gewöhnlichsten Numeri figurati genennet werden. Sonst heissen sie auch combinatorii, Polygoni Numeri, *Polygonal*-Zahlen. Die Anzahl derer Terminorum einer solchen Arithmetischen Progression, welche summiret werden, heisset die Seite des Numeri figurati oder polygoni. Es sey die arithmetische Progression, 1,2,3,4,5 etc. so kommt, wenn man solche mit Zahl-Pfennigen in eine Figur abgesetzet, auf die erste Linie A einer; auf die



andere B zwey; auf die dritte C drey; auf die vierte D 4; auf die fünfte E 5. Pfennige; und die Figur AEF wird ein Triangulum aequilaterum, darinnen die Linien A, B, C, D, E, die Terminos der Progression nach ihren Einheiten andeuten; die Seite AE aber nach der Anzahl ihrer Einheiten, die Anzahl derer Terminorum, welche summiret werden und die gantze Figur AEF, das ist, alle in sie rengirte Pfennige oder Einheiten zusammen genommen, die Summe der Progression oder den Numerum figuratum vorstellen. Da nun in diesem Falle ein Triangel vor diese Zahlen herauskommt, so nennet man die Summen einer Arithmetischen Progression, 1,2,3,4,5, etc. Triangular-Zahlen, Numeros triangulares. Auf gleiche Art lassen sich die Termini einer Arithmetischen Progression 1,3,5,7,9 etc. in eine Figur bringen. Es sey A der erste Terminus 1, in BCD



setze man den andern Terminum 3, in Forme eines Quadrats, so wird, wenn man so fortfähret, die Figur des Quadrats beyzubehalten, in die dritte Reihe EFG, 5. Pfennige oder der dritte Terminus der Progression; in die vierte Reihe HKL 7. Einheiten, oder der vierte Terminus und so ferner bekommen; da inzwischen die Figur immer einerley, nemlich ein Quadrat verbleibet. Die Reihen, A, BCD, EFG, HKL, praesentiren die darinnen Terminos der Progression, die Seite AH stellet nach der Menge ihrer Einheiten die Anzahl derer Glieder der Progression vor, welche sollen summiret werden, und die gantze Figur nach der Menge derer in sie befindlichen Einheiten zeiget ihre Summe oder die figürliche Zahl. Durch Anlaß dieser Figur werden die Polygonal-Zahlen, welche aus der Summation der Arithmetischen Progression 1,3,5,7, etc. entstehen, *Quadrat*-Zahlen genennet. Wenn man nach einer gleichen Methode die Terminos derer arithmetischen Progressionen 1,4,7,10, 13,16. etc. 1,5,9,13,17 etc. und so weiter in eine Figur bringet; so wird man befinden, daß jene sich in ein regulair Sechs-Eck und so ferner placiren lassen; dahero werden die Summen aus jener Pentagonal-Zahlen, aus dieser Hexagonal-Zahlen und so weiter genennet. Es bekommt demnach eine figürliche Zahl von der Anzahl derer Winckel derjenigen geometrischen Figur, die sie vorstellig macht, ihren Namen. Wenn man nun auf den Unterscheid derer Glieder in denen arithmetischen Progressionen, daraus die figürlichen Zahlen erwachsen, Acht hat; so wird man befinden, daß diese Differentz alle Zeit um zwey von der Anzahl derer Winckel, davon die figürliche Zahl den Namen führet, unterschieden sey. Z. E. bey denen Triangular-Zahlen ist die Anzahl derer Winckel 3, die Differentz in der ihnen respondirenden Progression 1; folglich der Unterscheid zwey. Bey denen Pentagonal-Zahlen ist die Anzahl derer Winckel 5, der Unterscheid derer Glieder in der respondirenden Progression 3, und folglich ermeldete Differentz wiederum zwey; und so bey denen übrigen. Es sey demnach die Anzahl derer Winckel, von welcher eine figürliche Zahl den Namen erhält, a; so wird die Differentz derer Glieder in der respondirenden Progression alle Zeit $a-2$. seyn. Da nun alle diese arithmetischen Progressiones sich vom 1. anfangen, so ist alle Zeit der Terminus 1; und man kann hieraus, wenn noch die Anzahl derer Glieder gegeben, die Summe, welche diese Glieder zusammen genommen ausmachen, das ist, die zukommende Polygonal-Zahl finden. Es sey die Anzahl derer Glieder, welche summiret werden sollen, $= n$. so kann man die Progression formiren, wenn man zu dem nächst vorhergehenden Termino alle Zeit die Differentz addiret, folglich ist sie

$$1,\quad 1+\overline{a-2},\quad 1+\overline{a-2}+\overline{a-2}$$
$$1+\overline{a-2}+\overline{a-2}+\overline{a-2} \text{ etc.}$$

das ist

$$1,\quad 1+\overline{a-2},\quad 1+2\,\overline{a-2},$$
$$1+3\,\overline{a-2} \text{ etc.}$$

da alle Zeit der coëfficiens vor der Differentz $a-2$, so groß ist als der Abstand desselben Glieds von dem ersten Termino um eins verringert. Z. E. bey $1+3\,\overline{a-2}$ ist der coëfficiens 3, und dieser Terminus ist der vierte in der Progression, oder die Anzahl derer Terminorum ist 4, und also um eins grösser als 3. Wenn derowegen die Anzahl derer Terminorum n ist, so ist der coëfficiens der Differentz im letzten Gliede $n-1$ folglich das letzte Glied selbst $1+\overline{n-1}\,\overline{a-2}$. Nun ist die Summe einer arithmetischen Progression so groß als ein Product aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die halbe Anzahl derer Glieder. Das erste Glied ist 1.

das letzte – – – $1+\overline{n-1}\,\overline{a-2}$

die Summe – – $2+\overline{n-1}\,\overline{a-2}$,

folglich